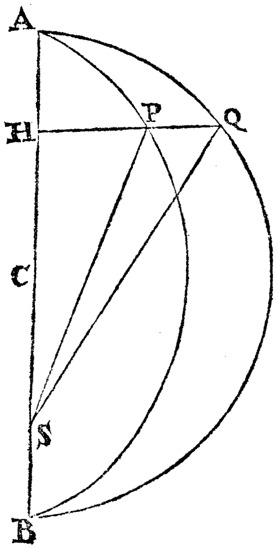
I. *Problematis* Kepleriani, *de inveniendo vero Motu Planetarum, areas tempori proportionales in Orbibus Ellipticis circa Focorum alterum describentium, Solutio* Newtoniana ; à D. J. Keill, *Astr. Prof. Savil.* Oxon. *& R. S. S. demonstrata & exemplis illustrata.*

KEPLERUS primus demonstravit, Planetas non in Orbibus Circularibus, sed Ellipticis, deferri; Solemq; in Ellipseos focorum uno situm ea ratione circumire, ut Radius à Planeta ad Solis centrum protensus, semper verrat Areas Ellipticas, quæ temporibus quibus describuntur sunt proportionales.

Divinum hoc sagacissimi *Kepleri* Inventum, exactissimis *Tychonis Brahe* Observationibus debetur; & tanto magis est suspiciendum, quòd illius ope, Universale motuum leges, totiusq; Mundani Systematis Philosophiam felicissime patefecerit Dominus *Newtonus*.

Cum itaq; tali lege moveantur circa Solem Planetæ, quo ipsorum loca in proprijs Orbitis ad datum tempus determinentur, necesse est ut solvetur Problema quod sequitur.

Invenire Positionem rectæ, quæ per datæ Ellipseos focum alterutrum transiens, abscindat Aream motu suo descriptam, quæ sit ad Aream totius Ellipseos in ratione data.



Sit nempe Ellipsis A P B, cujus focus alteruter S. Invenienda est positio rectæ S P, quæ abscindat Aream trilineam A S P, ad quam Area totius Ellipseos eandem rationem habet, quam tempus Periodicum Planetæ Ellipsim describentis, ad aliud tempus datum; quâ inventâ dabitur punctum P ubi planeta ad tempus illud datum versatur. Vel sit A Q B semicirculus supra Ellipseos axem majorem descriptus, ducenda est per S recta S Q abscindens Aream A S Q, ad quam Area totius circuli est in eadem ratione: si enim ex Q demittatur in Axem perpendicularis Q H, Ellipsi occurrens in P, ducta S P dabit Aream Ellipticam quæsitam; & punctum P erit locus Planetæ ad datum tempus. Est enim semisegmentum Ellipticum A P H ad semisegmentum circulare A Q H, ut H P ad H Q, hoc est, ut area totius Ellipseos ad aream totius Circuli; sed est triangulum S P H ad triangulum S Q H in eadem ratione P H ad Q H: Adeoq; Area ASP est ad Aream totius Ellipseos, ut area A S Q ad aream totius Circuli. Unde si habeatur methodus secandi in datâ ratione Aream circuli, rectâ ductâ per datum punctum S, facile erit hac ipsa ratione secare Aream Ellipticam.

Ipsi

Ipſi *Keplero*, qui primus Problema propoſuit, nulla innotuit Methodus directa computandi locum Planetæ ex dato tempore; ſed illi neceſſe fuit, per ſingulos gradus ſemicirculi A Q B progrediendo, ex dato arcu A Q, quam vocat Anomaliam Excentri, tam tempus per aream A S Q, quæ Anomaliæ mediæ eſt proportionalis, quam angulum A S P, hoc eſt locum Planetæ, ſeu Anomaliam coæquatam huic tempori reſpondentem, calculo eruere.

Cum itaq; difficilis fuit hujus Problematis ſolutio, Aſtronomi ad alias tranſiverant Hypotheſes, fingendo punctum aliquod circa quod motus foret æquabilis, ſeu tempori proportionalis, & exinde datâ Anomaliâ mediâ, coæquatam determinabant. Sed computus hiſce hypotheſibus innixus, obſervationibus non congruere deprehenſus eſt: Itaq; Geometræ varias adhibuerunt approximationes, quibus ex datâ Areâ A S Q tempori Analogâ, angulus A S P, hoc eſt Planetæ locus, quam proxime eliciatur. At horum omnium facillima, & ad Praxim maxime expedita, mihi videtur eſſe illa methodus quam tradit Dominus *Newtonus* in *Principiis*, *pag.* 111 & 112. *Edit.* 1*mæ*. quæ fere ſimilis eſt ei, qua ex æquationibus affectis extrahunt Radicem Analyſtæ; & quidem tanto magis eſt æſtimanda, quod non ſolum exhibeat Planetarum loca, quorum orbitæ ad Circuli formam proxime accedunt, ſed eadem fere facilitate inſervit etiam Cometis, qui in orbitis maxime excentricis moveantur.

Hanc itaque methodum in gratiam Artificum, qui Tabulas Aſtronomicas ſecundum veras motuum leges, & non ex fictis hypotheſibus condere volunt, hic exponendam duxi.

Sit itaq; A Q B ſemicirculus ſupra Axem majorem Ellipſeos deſcriptus, cujus centrum C, & focus in quo Sol locatur ſit S. Ducatur C Q, in quam (ſi opus ſit) productam cadat perpendicularis S F. Eſt Area A S Q = ſectori A C Q + Triang. C S Q = $\frac{1}{2}$ CQ × A Q + $\frac{1}{2}$ C Q × S F; adeoq; ob datam $\frac{1}{2}$ C Q erit Area A S Q ſemper

 pro-

Fig. 2.

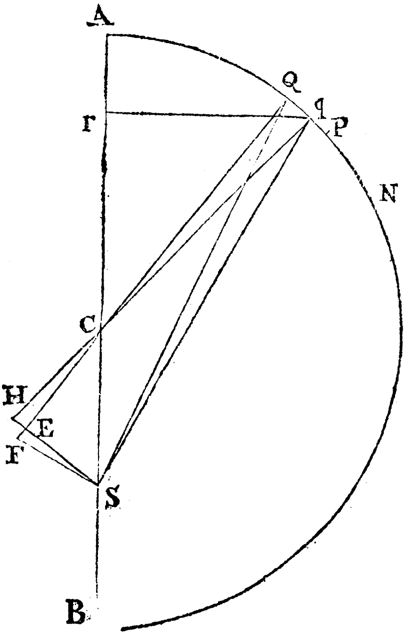


Fig. 4.

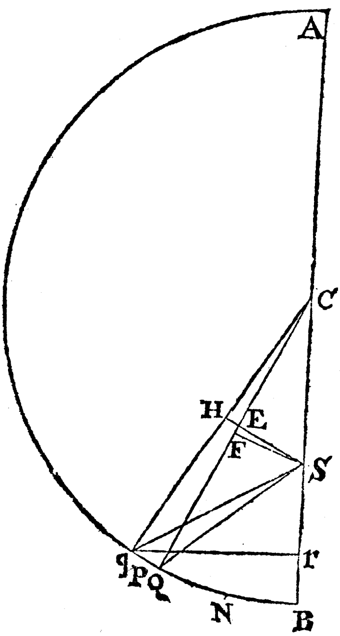
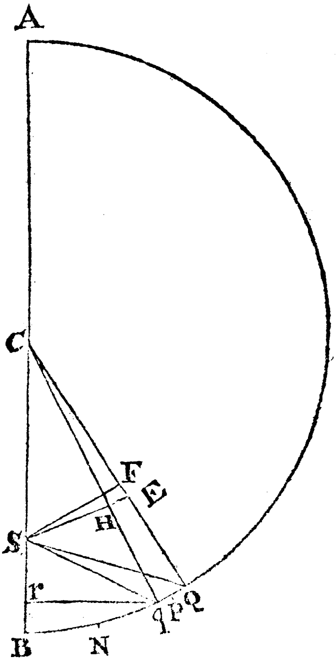


Fig. 3.



proportionalis arcui A Q + recta S F, cum scil. motus sit ab Aphelio versus Perihelium: at cum à Perihelio ad Aphelion tendit Planeta, ut in Figura quarta, fit Area B S Q = sectori B C Q — Triang. C S Q, adeoq; erit illa proportionalis arcui B Q — recta S F. Hinc si capiatur Arcus A N in Fig. 2. & 3. & B N in Fig. 4. temporibus proportionalis, erit A Q + S F = A N, & B Q — S F = B N: unde S F erit = Q N, modo arcus A N vel B N sint proportionales temporibus quibus describuntur areæ A S Q vel B S Q. Ut vero inveniatur in gradibus eorumque partibus mensura arcûs in peripheria A Q B, qui sit æqualis rectæ S F, Fiat ut C Q ad C S ita arcus graduum 57,29578 (qui æqualis est C Q radio) ad arcum quartum, qui æqualis erit C S. Sit arcus ille B. Est autem C S ad S F ut Radius ad sinum anguli S C F vel A C Q. Fiat itaq; ut Radius ad sinum anguli A C Q vel arcûs AQ, ita arcus B ad alium D; erit arcus ille D æqualis rectæ S F, adeoq; si, ad datum tempus, Area A S Q esset tempori proportionalis, esset Arcus D = N Q: & capiendo arcum NP = D, punctum P caderet in Q. Si vero Area A S Q non exacte tempori respondeat, punctum P cadet supra vel infra Q, prout Area A S Q major sit vel minor verâ Areâ quæ tempori respondeat. Sit ea A S q & in C q cadat perpendicularis S H: erit per hactenus demonstrata S H = N q. At est S F = N P, unde erit S H — S F vel S F — S H, hoc est fere H E = q P = Q P — Q q vel = Q q — Q P: Et si angulus Q C q sit parvus, erit C H : C Q :: H E : Q q :: Q P — Q q : Q q, unde C Q + C H : C Q :: Q P : Q q, cum arcus A Q est quadrante minor. At cum is est quadrante major, erit C Q — C H : C Q :: Q P : Q q. Et similiter cum arcus B Q est quadrante minor, erit C Q — C H : C Q :: Q P : Q q.

Si angulus A C Q vel B C Q parvus sit, h. e. si Planeta prope Apsides versetur, erit ut C A $\pm$ C S : C A :: Q P : Q q.

Fiat

Fiat ut C S ad CQ ita Radius R ad longitudinem quandam L, erit $CQ = \frac{CS \times L.}{R}$. Eſt vero Radius ad coſinum anguli A C Q ut SC ad CF vel CH (ſunt enim CH & CF fere æquales) quare erit $CH = \frac{SC \times cof. ACQ}{R}$, adeoq; QP : Qq : : $\frac{CS \times L + CS \times cof.\ ACQ}{R} : \frac{CS \times L}{R}$: : L + *coſ.* A C Q : L, cum arcus A Q ſit quadrante minor. At ſi A Q ſit quadrante major, erit QP : Qq : : L — *coſin.* A C Q : L.

Atque hac ratione ſi capiatur utcunq; arcus A Q, qui aliquantiſper minor ſit aut major vero, invenietur exinde arcus Qq huic addendus aut demendus, qui facit ut Area A S q ſit quam proxime tempori proportionalis. Et ſi loco A Q capiatur arcus A q, & inſtituatur proceſſus priori ſimilis, invenietur alius A q, qui ſimiliter eundem repetendo proceſſum dabit alium A q, atq; ſic quantumvis proxime ad veritatem accedere licebit.

Invento angulo A C q, facile habebitur angulus A S q, cum in triang. q C S dentur latera C q & C S & angulus q C S. Dabitur exinde angulus C S q cujus tangens diminuendus eſt in ratione axis minoris Ellipſeos ad majorem, ut tandem habeatur tangens anguli A S P. Vel ſic forte facilius inveſtigatur angulus A S P. Sit F numerus qui exprimit longitudinem C S in partibus qualium C Q eſt 100000 : a puncto q ad axem demittatur perpendicularis q r, qui erit ſinus arcus dati A q, & erit C r ejuſdem coſinus & S r = ſummæ vel differentiæ rectarum C r, C S, hoc eſt S r = F ± coſin. A C q : adeoq; in rectangulo triangulo r S q, datis S r, r q, invenietur angulus r S q. Hinc ſi in unam ſummam addantur ſinus Log. ang. A C q, complementum Arithmeticum Logarithmi S r, & Logarithmus rationis axis minoris Ellipſeos ad majorem dabitur Tangens anguli A S P.

Tanta

Tanta autem eſt hujus methodi facilitas ut ea exemplis magis quam ulteriori explicatione indigeat; adeoq; licebit eam in motibus Planetæ Martis experiri, in cujus orbita, ſecundum Tabulas *Carolinas*, Excentricitas eſt ad diſtantiam mediam ut 14100 ad 152369, adeoque Logarithmus arcus B, qui æqualis eſt rectæ S C, erit 0,7244451. Erit etiam in hoc exemplo L partium 1080631 qualium Radius eſt 100000: Inveniendus ſit angulus A C Q cum motus medius, ſeu arcus tempori proportionalis ab Aphelio computatus, ſit unius Gradus. Quoniam C S ſit hic fere pars decima ipſius C A, pono Arcum A Q eſſe 0,9 grad. decima ſcil parte minorem motu medio. Addatur ſinus Logarithmicus arcus A Q ad Log. B, & ſit ſumma 8,9205471= Log. numeri 0. 083281 qui numerus exprimit arcum æqualem rectæ S F = N P. Et ſi arcus A Q eſſet recte aſſumptus, foret AN—NP=AQ, & Q P =0. At hic eſt Q P = 0, 016719, a quo ſi auferatur ejus pars undecima, cum A S ſuperat A C undecima circiter ipſius parte, reſtabit Q q = 0,0152; qui additus ad A Q dat A q = 0.9152, qui ne milleſima gradus parte a vero A q differt. Sit ſecundò Arcus A N ſeu motus medius = 2 gr. Pono A Q= 1,83 prioris A q fere duplum, & ad ejus ſinum Log. addatur Log. B: erit ſumma 9. 2286997 = Log. numeri 0,16931, unde erit Q P 0,00069; a quo ſi ſubducatur ejus pars undecima, ſit Qq=0,00063, & Aq=1,83063, qui ne decies milleſima gradus parte a vero A q diſcrepat. Eodem modo ſit motus medius ſeu arcus tempori proportionalis grad. 3. Fiat arcus A Q 2,745 = 1,83 + 0,915, & ad ejus ſinum Log. addendo Log. B, habebitur Log. numeri 0,25392 = NP, & A N—NP = 2,74608, adeoq; Q P = 0,00108, unde Q q fere = 0,001 & A q = 2,746. Sic unica duorum Logarithmorum additione invenietur arcus A q, qui erit verus ad gradus partes milleſimas.

Si jam non gradatim ſed per ſaltum pergendo, inveniendus ſit angulus A C q, cum motus medius eſt grad. 45. Pono arcum A Q eſſe graduum 40, & ad ſinum ejus Logarithgarithmicum addendo Log. B fit ſumma 0.5325125 = Log.numeri 3,4081; qui numerus à 45 ſubductus relinquit A N — N P = 41,5919, cujus exceſſus ſupra arcum A Q eſt 1,5919. Unde ſi fiat ut L + coſ. A C Q ad L ita 1,5919 ad alium, invenietur arcus Q q eſſe graduum 1.4865, adeoq; A q = 41,4865, qui non multum ſupra milleſimam gradus partem à vero differt. Verum abſq; hac proportione inveniri poteſt A q, capiendo novum arcum A Q, qui ſit aliquantulum minor quam A N — N P, eidem tamen fere æqualis; ſcil. ſit A Q = 41.50, & addendo Log. datum B ad ejus ſinum Log. habebitur alter N P = 3. 35131, qui ab AN ſubductus dat 41,4869 pro novo A q: & hic arcus minore labore eruitur, & aliquanto propius ad verum accedit quam prior A q.

Poſt inventum A q correſpondentem motui medio 45°, rurſus gradatim pergendo, unica duorum Logarithmorum additione, habebitur A q, ad omnes motus medij gradus ſubſequentes. Nempe cum motus medius ſit grad. 46, pono A Q = 42,40. & addendo ejus ſinum Log. ad conſtantem B, fiet A N — N P = 42,4249; cui arcui ſi novus AQ æqualis ponatur, habebitur A q, qui ne milleſima gradus parte à vero A q diſcrepabit. Sic cum motus medius ſit 47°, pono A Q = 43,36 = priori A q + incremento iſtius arcus pro uno gradu motus medij, & addendo ejus ſinum Log. ad Log. B, fit ſumma = Log. numeri 3,6402, qui ab A N ſubductus relinquit A N — N P = 43,3598 = novo A q, qui circiter gradus parte decies milleſima á vero A q diſcrepat.

Si omiſſis gradibus intermedijs inveniendus eſſet arcus A q, cum motus medius ſit gr. 100. Pono A Q grad. 96, & addendo ejus ſinum Log. ad Log. B, fit ſumma = Log. numeri 5,273 unde, A N — N P = 94,727. Itaque pono ſecundo A Q = 94,72 & addendo ejus ſinum ad Log. B, habebitur Log. numeri 5,285, qui ab A N ſubductus dat A N — N P = 94,715 = A q quam proxime. Similiter ſi motus medius ſit grad. 101, pono A Q eſſe 95,71, cujus ſinus Log. ad Log. B additus dat Log. numeri 5,2756; quo numero ab 101 ſublato, reſtabit AN — NP = 95, 7244 = Aq. Atq; hac ratione, dato motu medio, ſi gradatim fiat proceſſus, habebitur angulus ad centrum per unicam tantum duorum Logarithmorum additionem; quorum unus, qui conſtans eſt, in charta ſeorſim ſervandus, quo labori ſæpius eundem exſcribendi parcatur.

Tranſeamus jam ad Orbitam alterius ſpeciei, talem nempe ut diſtantia Aphelij ſit ad diſtantiam Perihelij ut 70 ad 1; qualis fere eſt iſtius Cometæ Orbita quem Periodum ſuam annis 75½ complere primus deprehendit Sagaciſſimus Aſtronomus & Geometra D. *Edmundus Halleius*, Geometriæ Profeſſor *Savilianus*. In hac Orbita erit AC vel CQ partium 35,5, & CS 34.5 qualium SB eſt una. Et inveniendus eſt arcus Bq, cum motus medius eſt gradus pars centeſima. Quoniam media diſtantia trigeſies & quinquies circiter ſuperat diſtantiam minimam, pono BQ = 0,35, cum motus medius eſt 0,01. In hac Orbita invenitur conſtans Log. B = 1.7457133. Hic itaq; Log. ad ſinum Log. arcus 0,35 additus dat Log. numeri 0,34013, qui ad arcum 0,01 additus erit = 0,35013. Si hæc ſumma eſſet æqualis 0,35, arcus BQ eſſet recte aſſumptus: ſed differentia eſt 0,00013. Unde quoniam CB eſt ad SB ut 35,5 ad 1, multiplicetur differentia 0,00013 per 35,5, & prodibit Qq = 0,004615; unde erit arcus Bq = 0,354615, qui vix per partes tres decies-milleſimas a vero diſcrepat.

Sit ſecundo motus medius 0,02, & ponatur BQ eſſe 0,71. Ad ejus ſinum Log. addendo Log. B, fit ſumma = Log. numeri 0,68998, unde BN + NP = 0,70998, adeoq; arcus aſſumptus BQ = 0,71 nimius fuit: & eſt differentia = 0,00002, quæ ſi per 35,5 multiplicetur & productus a BQ ſubducatur, reſtabit Bq = 0,7092, vix gradus parte decies-milleſima à vero aberrans.

Sit motus medius 0,03. Ponatur BQ eſſe 1°,06: addendo ejus Log.ſin, ad Log.B, fit ſumma = Log. numeri 1,03008, cui ſi addatur B N = 0,03, fit ſumma 1,06008, qui numerus major eſt quam B Q; quare ſi differentia 0,00008 per 35,5 multiplicetur & ad B Q addatur, erit B q = 1,06284. Similiter cum motus medius ſit 0,04, pono B Q = 1°,40 & invenio N P = 1,3604; ad quem numerum addendo B N = 0,04 fit ſumma = 1,4004 qui ſuperat 1,40 per 0,0004. Multiplicetur hæc differentia per 35,5 & productus 0,01420 erit æqualis Q q, unde B q = 1,41420. In hiſce omnibus errores ſunt admodum exigui, & raro milleſimam gradus partem tranſcurrentes.

Inveniendus ſit jam arcus B q, cum motus medius ſit æqualis uni gradui. Pono B Q = 20°, & addendo ejus ſinum Log. ad Log. B, habebitur Log. numeri 19,045; cui addendo B N = 1°, ſumma 20,045 ſuperat 20 per ,045: Et cum in hoc caſu L — coſin B Q eſt ad L ut 1 ad 11.5 fere, multiplico differentiam ,045 per 11,5, & productus ,5175 ad B Q additus facit 20,5175. Pono igitur ſecundo B Q = 20,51, & prodibit, ſimiliter ut in præcedentibus, N P = 19.5092; cui addendo B N fit ſumma 20,5092, quæ minor eſt quam B Q: unde ſi differentia 0,0008 multiplicetur per 11,5, & productus 0,0092 ſubſtrahatur a B Q, reſtabit B q = 20,5008.

Sit deniq; motus medius æqualis duobus grad. Pono B Q grad. 30, & invenitur N P = 27,84, cui addendo gradus duos, ſumma 29.84 minor eſt quam 30; & ſi multiplicetur differentia 0,16 per 6,3 (nam L — coſ. B Q eſt ad L ut 1 ad 6,3 ferè) fiet 1,008 = Q q; adeoq; hic arcus a B Q ſubductus dat B q = 28,982: Ut vero corrigatur B q, aſſumo ſecundo B Q = 29°, & ſimili proceſſu invenietur B q = 28,9672.

II. *De*